

## Correction Feuille Exercice 7

 *Calculer des probabilités à l'aide du dénombrement*

**Exercice 15**

On lance deux fois de suite un dé équilibré.

1. L'univers est  $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$  et  $\text{card}(\Omega) = 36$ . On compte alors le nombre de possibilités pour obtenir 8 avec deux dés :

$$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$$

Il y a 5 possibilités. La probabilité d'obtenir 8 est donc

$$p = \frac{5}{36}.$$

2. La probabilité n'est pas  $\frac{1}{11}$  car la loi de probabilité associée à la somme obtenue sur deux lancer de dé n'est pas uniforme.

**Exercice 16 (\*)**

On tire 3 cartes une à une et au hasard avec remise à chaque fois de la carte tirée, dans un jeu de 32 cartes (8 hauteurs et 4 couleurs).

Avant de débiter l'exercice, comptons le nombre de possibilités. On tire trois cartes dans l'ordre et avec remise. L'ensemble des résultats de cette expérience (i.e.  $\Omega$ ) est une 3-liste de l'ensemble  $E$  des cartes (on a  $\text{card}(E) = 32$ ). Donc

$$\text{card}(\Omega) = 32^3$$

1. On note  $A$  l'évènement obtenir 3 valets. On compte le nombre d'éléments de  $A$ . On note  $F$  l'ensemble des valets ( $\text{card}(F) = 4$ ). L'ensemble  $A$  est donc une 3-liste de  $F$ . On a ainsi :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{4^3}{32^3} = \frac{1}{8^3} = \frac{1}{512}$$

2. On note  $B$  l'évènement "obtenir 3 fois une carte de même hauteur". Il sera plus facile ici de dénombrer les évènements :

$B_k$  : "obtenir 3 fois une carte de hauteur  $k$ " (en considérant que les valets ont une hauteur 11, les dames une hauteur 12, les rois une hauteur 13, et l'as une hauteur de 14).

Pour tout  $k \in \llbracket 7, 14 \rrbracket$ , on a alors (même raisonnement que pour la question 1)  $\text{card}(B_k) = 4^3$  et  $p(B_k) = \frac{1}{8^3}$ . On sait également que  $B = \bigcup_{k=7}^{14} B_k$  et que les évènements  $B_k$  sont incompatibles deux à deux. Donc

$$P(B) = P\left(\bigcup_{k=7}^{14} B_k\right) = \sum_{k=7}^{14} P(B_k) = 8 \times \frac{1}{8^3} = \frac{1}{64}$$

3. On note  $C$  l'évènement "aucune de ces cartes n'est un valet". On note  $G$  l'ensemble des cartes qui ne sont pas des valets ( $\text{card}(G) = 28$ ). L'ensemble  $C$  est donc une 3-liste de  $G$  et donc

$$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{28^3}{32^3} = \frac{7^3}{8^3} = \frac{343}{512}$$

L'évènement que l'on voulait calculer est  $\overline{C}$  : "Au moins une des carte est un valet.

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = \frac{169}{512}.$$

### Exercice 17 (\*)

On tire 3 cartes une à une et au hasard **sans** remise à chaque fois de la carte tirée, dans un jeu de 32 cartes (8 hauteurs et 4 couleurs).

Avant de débiter l'exercice, comptons le nombre de possibilités. On tire trois cartes dans l'ordre et sans remise. L'ensemble des résultats de cette expérience (i.e.  $\Omega$ ) est un 3-arrangement de l'ensemble  $E$  des cartes (on a  $\text{card}(E) = 32$ ). Donc

$$\text{card}(\Omega) = A_{32}^3 = \frac{32!}{29!} = 32 \times 31 \times 30$$

1. On note  $A$  l'évènement obtenir 3 valets. On compte le nombre d'éléments de  $A$ . On note  $F$  l'ensemble des valets ( $\text{card}(F) = 4$ ). L'ensemble  $A$  est donc un 3-Arrangement de  $F$ . On a ainsi :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{4 \times 3 \times 2}{32 \times 31 \times 30} = \frac{1}{4 \times 31 \times 10} = \frac{1}{1240}$$

2. On note  $B$  l'évènement "obtenir 3 fois une carte de même hauteur". Il sera plus facile ici de dénombrer les évènements :

$B_k$  : "obtenir 3 fois une carte de hauteur  $k$ " (en considérant que les valets ont une hauteur 11, les dames une hauteur 12, les rois une hauteur 13, et l'as une hauteur de 14).

Pour tout  $k \in \llbracket 7, 14 \rrbracket$ , on a alors (même raisonnement que pour la question 1)  $\text{card}(B_k) = 4 \times 3 \times 2$  et  $p(B_k) = P(A) = \frac{1}{4 \times 31 \times 10}$ . On sait également que  $B = \bigcup_{k=7}^{14} B_k$  et que les évènements  $B_k$  sont incompatibles deux à deux. Donc

$$P(B) = P\left(\bigcup_{k=7}^{14} B_k\right) = \sum_{k=7}^{14} P(B_k) = 8 \times \frac{1}{4 \times 31 \times 10} = \frac{1}{31 \times 5} = \frac{1}{155}$$

3. On note  $C$  l'évènement "aucune de ces cartes n'est un valet". On note  $G$  l'ensemble des cartes qui ne sont pas des valets ( $\text{card}(G) = 28$ ). L'ensemble  $C$  est donc un 3-arrangement de  $G$  et donc

$$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{28 \times 27 \times 26}{32 \times 31 \times 30} = \frac{4 \times 7 \times 9 \times 3 \times 2 \times 13}{4 \times 8 \times 31 \times 3 \times 5 \times 2} = \frac{7 \times 9 \times 13}{8 \times 31 \times 5} = \frac{819}{1240}$$

L'évènement que l'on voulait calculer est  $\overline{C}$  : "Au moins une des carte est un valet.

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = \frac{421}{1240}.$$

### Exercice 18 (\*\*)

On s'appliquera à justifier les réponses. Le résultat numérique final n'est pas exigé (laisser sous formes de formule). Une main de poker est constitué de 5 cartes tirées d'un jeu de 52 cartes (4 couleurs et 13 cartes par couleurs).

Dans cet exercice, l'ensemble des mains de poker est constitué de cartes sans ordre (A2345 est la même main que 24A35) et sans remise (on ne peut pas avoir deux fois la même carte sauf si vous trichez dans un saloon du XIXe siècle)

1. L'ensemble  $\Omega$  des mains de poker possible (i.e. des résultats de l'expérience) est donc une combinaison de 5 éléments de  $E$  l'ensemble des cartes. Ainsi,

$$\boxed{\text{card}(\Omega) = \binom{52}{5} = 2\,598\,960.}$$

2. On note  $B$  l'ensemble des tirages donnant exactement 5 cartes de même couleur. On note alors respectivement  $B_{\heartsuit}$  ( $B_{\diamondsuit}$ ,  $B_{\spadesuit}$ ,  $B_{\clubsuit}$ ) les ensembles des tirages donnant exactement 5 cartes de cœur (de carreau, de pique, de trèfle). On remarque que

$$\text{card}(B_{\heartsuit}) = \text{card}(B_{\diamondsuit}) = \text{card}(B_{\spadesuit}) = \text{card}(B_{\clubsuit})$$

Ces ensembles sont disjoints deux à deux et l'ensemble  $B$  est l'union de ces ensembles ainsi

$$\text{card}(B) = 4\text{card}(B_{\heartsuit}).$$

On calcule le nombre d'éléments dans  $B_{\heartsuit}$ .  $B_{\heartsuit}$  est une combinaison de 5 éléments de  $F$  l'ensemble des cœurs. Donc

$$\text{card}(B_{\heartsuit}) = \binom{13}{5} = \frac{13!}{5!8!} = 1287$$

Finalement

$$\boxed{\text{card}(B) = 4 \times \text{card}(B_{\heartsuit}) = 4 \times 1287 = 5148.}$$

3. On note  $C_1$  l'ensemble des tirages donnant les 4 As. On considère  $Q_1$  l'ensemble des combinaison de 4 cartes contenant un As et  $A$  l'ensemble des combinaison de 1 carte ne contenant pas d'As. On a ainsi  $C_1 = Q_1 \times A$ .

— On compte le nombre de combinaisons de 4 cartes contenant un As ( $\text{card}(Q_1) = \binom{4}{4} = 1$ )

— On compte le nombre de combinaison de 1 carte ne contenant pas de roi ( $\text{card}(A) = \binom{48}{1} = 48$ )

L'ensemble des tirages donnant les 4 As est donc :

$$\boxed{\text{card}(C_1) = \text{card}(Q_1) \times \text{card}(A) = \binom{4}{4} \times \binom{48}{1} = 48.}$$

On note  $C$  l'ensemble des mains donnant un carré. Afin de déterminer le nombre de carré possible, il faut définir les ensembles

$C_k$  : "On obtient un carré de valeur  $k$ " (en supposant que les valets, les dames les rois ont respectivement pour valeur 11, 12 et 13)

On a évidemment pour tout  $k \in \llbracket 1, 13 \rrbracket$ ,

$$P(C_k) = P(C_1) = 48$$

Les ensembles  $C_k$  sont deux à deux disjoints donc

$$P(C) = P\left(\bigcup_{k=1}^{13} C_k\right) = \sum_{k=1}^{13} P(C_k) = 13 \times 48 = 624$$

4. On s'intéresse à l'ensemble  $D_{\clubsuit}$  des mains contenant 3 cartes de trèfles et deux cartes qui ne sont pas du trèfle. On a alors  $D_{\clubsuit} = E_{\clubsuit} \times F_{\clubsuit}$  où

—  $E_{\clubsuit}$  est l'ensemble des combinaisons de 3 cartes ne contenant que du trèfle ( $\text{card}(E_{\clubsuit}) = \binom{13}{3} = 286$ ).

—  $F_{\clubsuit}$  l'ensemble des combinaisons de 2 cartes ne contenant pas de trèfle ( $\text{card}(F_{\clubsuit}) = \binom{39}{2} = 741$ ).

Ainsi on calcule

$$\text{card}(D_{\clubsuit}) = 286 \times 741 = 211\,926$$

Le cardinal de l'ensemble  $D$  correspondant aux mains contenant exactement 3 cartes de la même couleur est donc obtenu en étudiant les cas trèfle, cœur, carreau et pique. On est encore une fois dans le cas d'une union disjointe d'ensemble et donc

$$P(D) = 4 \times P(D_{\clubsuit}) = 4 \times 211\,926 = 847\,704$$

**Exercice 19 (\*\*\*)**

On cherche à démontrer le théorème suivant :

”Si  $E$  est un ensemble à  $n$  éléments alors  $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ .”

$\forall p \in \{0, \dots, n\}$ , on pose  $E_p$  l'ensemble des parties de  $E$  à  $p$  éléments.

1. On a clairement

$$\mathcal{P}(E) = \bigcup_{p=0}^n E_p.$$

2.  $E_p$  est l'ensemble des parties de  $E$  à  $p$  éléments. un élément de  $E_p$  est donc une combinaison de  $p$  éléments de l'ensemble  $E$ . Ainsi

$$\text{card}(E_p) = \binom{n}{p}$$

3. Les ensembles  $E_p$  (pour  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ) sont deux à deux disjoints. Donc

$$\begin{aligned} \text{card}(\mathcal{P}(E)) &= \sum_{k=0}^n \text{card}(E_k) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k \times 1^{n-k} \\ &= 2^n \end{aligned}$$

 *Calculer avec des factorielles et des coefficients binomiaux*

**Exercice 20 (Calculs)**

les coefficients binomiaux suivants.

1.  $A = \binom{2}{2} = 1$  (cours)

2. On a

$$\begin{aligned} B &= \binom{17}{14} \\ &= \frac{17!}{14! \times 3!} \\ &= \frac{17 \times 16 \times 15}{3 \times 2} \\ &= 17 \times 8 \times 5 \\ &= 680 \end{aligned}$$

3. On calcule d'une part

$$\begin{aligned} C &= \binom{10}{2} + \binom{10}{3} \\ &= \frac{10!}{2!8!} + \frac{10!}{3!7!} \\ &= \frac{10 \times 9}{2} + \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} \\ &= 45 + 120 = 165 \end{aligned}$$

On calcule ensuite le coefficient

$$\binom{11}{3} = \frac{11!}{3!8!} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2} = 165$$

### Exercice 21 (Calculs)

On développe les expressions suivantes

1. On calcule

$$\begin{aligned} A &= (a + 2)^3 \\ &= a^3 + 3a^2 \times 2^1 + 3a \times 2^2 + 2^3 \\ &= a^3 + 6a^2 + 12a + 8 \end{aligned}$$

2. On calcule

$$\begin{aligned} B &= (1 + \sqrt{2})^4 + (1 - \sqrt{2})^4 \\ &= 1 + 4\sqrt{2} + 6(\sqrt{2})^2 + 4(\sqrt{2})^3 + (\sqrt{2})^4 + 1 - 4\sqrt{2} + 6(\sqrt{2})^2 - 4(\sqrt{2})^3 + (\sqrt{2})^4 \\ &= 1 + 6 \times 2 + 4 + 1 + 6 \times 2 + 4 \\ &= 34 \end{aligned}$$

### Exercice 22 (\*)

On désigne par  $n$  et  $k$  deux entiers naturels tels que  $k \leq n$ .

1. Soit  $i \in \llbracket k, n \rrbracket$ . On a d'une part,

$$\begin{aligned} \binom{n}{i} \binom{i}{k} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{i!}{k!(i-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-i)! \times k! \times (i-k)!} \end{aligned}$$

Et d'autre part,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-k-(i-k))!} \\ &= \frac{n!}{k! \times (i-k)! \times (n-i)!} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\binom{n}{i} \binom{i}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k}}$$

2. Soit  $x$  un nombre réel

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} x^{n-i} &= \sum_{i=k}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} x^{n-i} \\ &= \binom{n}{k} \sum_{i=k}^n \binom{n-k}{i-k} x^{n-i} \end{aligned}$$

On effectue alors un changement d'indice dans la somme en posant  $j = i - k$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} x^{n-i} &= \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} x^{n-k-j} \\ &= \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} 1^j x^{n-k-j} \\ &= \boxed{\binom{n}{k} (1+x)^{n-k}} \end{aligned}$$

en reconnaissant le binôme de Newton.

### Exercice 23 (Calcul de sommes avec des factorielles)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On a

$$\boxed{(k+1)k! = (k+1)! \text{ et } (k+2)(k+1)k! = (k+2)!}$$

2. On considère la somme  $S_n = \sum_{k=1}^n k \times k!$ .

(a) On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k \times k! \\ &= \sum_{k=1}^n (k+1-1) \times k! \\ &= \sum_{k=1}^n (k+1)k! - k! \\ &= \boxed{\sum_{k=1}^n (k+1)! - \sum_{k=1}^n k!} \end{aligned}$$

(b) On reconnaît une somme télescopique donc

$$\boxed{S_n = (n+1)! - 1}$$

3. On considère la somme  $T_n = \sum_{k=1}^n (k^2 + 1) \times k!$ .

(a) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On développe la partie de droite :

$$\begin{aligned} (k+2)(k+1) - 2(k+1) + 1 - k &= k^2 + 2k + k + 2 - 2k - 2 + 1 - k \\ &= \boxed{k^2 + 1} \end{aligned}$$

(b) On en déduit

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n (k^2 + 1) \times k! \\ &= \sum_{k=1}^n ((k+2)(k+1) - 2(k+1) + 1 - k) \times k! \\ &= \sum_{k=1}^n (k+2)(k+1)k! - 2(k+1)k! + k! - kk! \\ &= \sum_{k=1}^n (k+2)! - 2 \sum_{k=1}^n (k+1)k! + \sum_{k=1}^n k! - \sum_{k=1}^n kk! \end{aligned}$$

On en déduit

$$T_n = \sum_{k=1}^n (k+2)! - 2 \sum_{k=1}^n (k+1)! + \sum_{k=1}^n k! - S_n.$$

(c) On découpe afin de remarquer les sommes télescopiques

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n (k+2)! - 2 \sum_{k=1}^n (k+1)! + \sum_{k=1}^n k! - S_n \\ &= \left( \sum_{k=1}^n (k+2)! - \sum_{k=1}^n (k+1)! \right) - \left( \sum_{k=1}^n (k+1)! - \sum_{k=1}^n k! \right) - S_n \\ &= (n+2)! - 2! - ((n+1)! - 1) - S_n \\ &= (n+2)! - (n+1)! - 1 - S_n. \end{aligned}$$

(d) En utilisant les questions 3(c) et 2(b), on obtient alors

$$\begin{aligned} T_n &= (n+2)! - (n+1)! - 1 - ((n+1)! - 1) \\ &= (n+2)! - 2(n+1)! \\ &= (n+2)(n+1)! - 2(n+1)! \\ &= (n+1)!(n+2-2) \\ &= n(n+1)! \end{aligned}$$